NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.
- **Secciones:**

A : Prof. Wilfred Flores. **C** : Prof. Cristian Mardones
B : Prof. Roque Bustamante. **D** : Prof. Armin Gusenbauer.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) a) **[10 pt]** Sea R la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx (m > 0)$. Encontrar el valor de m tal que los volúmenes generados por la rotación de R en torno al eje x y en torno al eje y sean iguales.

Solución:

$$V_x = \pi \int_0^m ((mx)^2 - (x^2)^2)\, dx$$

$$V_y = 2\pi \int_0^m x(mx - x^2)\, dx$$

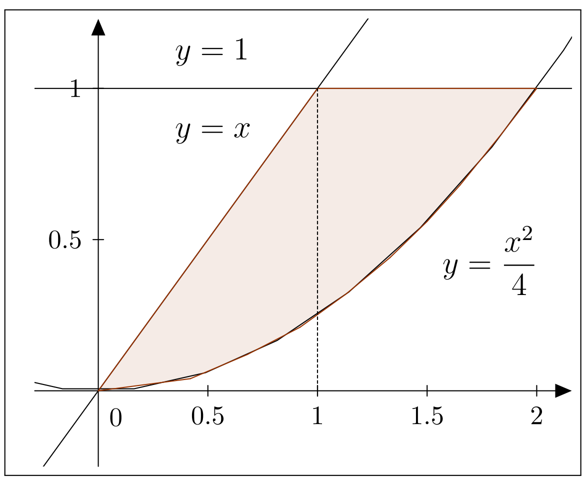
5 puntos

Igualando se obtiene $m = \dfrac{5}{2}$

5 puntos

b) **[10 pt]** Exprese sin calcular las integrales que permiten calcular el área de la región en el primer cuadrante, acotada por arriba por las rectas $y = x$, $y = 1$ y por abajo por la curva $y = \dfrac{x^2}{4}$

Solución:



3 puntos

$$A = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

7 puntos

2) a) **[10 pt]** Si $g(x) = \int_a^x \sin x \cdot f(t)\,dt$, demostrar que $g''(x) + g(x) = 2f(x)\cos x + f'(x)\sin x$

Solución:

$g(x) = \sin x \int_a^x f(t)\,dt$

$g'(x) = \cos x \int_a^x f(t)\,dt + \sin x f(x)$

3 puntos

$g''(x) = -\sin x \int_a^x f(t)\,dt + \cos x f(x) + \cos x f(x) + \sin x f'(x)$

3 puntos

Se observa que al sumar $g''(x) + g(x)$ se obtiene: $2\cos x f(x) + \sin x f'(x)$

4 puntos

b) **[10 pt]** Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \underbrace{=}_{LH} \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}}_{3pt} \underbrace{=}_{LH} \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}}_{3pt} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{4pt}$$

3) **[20 pt]** Determine si la integral impropia converge o diverge, en caso que convergencia, calcular su valor.

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2(x+1)} && \text{3 puntos}\\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right] dx && \text{5 puntos}\\
&= \lim_{b\to\infty} [-\ln b - \frac{1}{b} + 1 + \ln(b+1) - \ln 2] && \text{2 puntos}\\
&= \left[\ln\left(\frac{b+1}{b}\right) - \frac{1}{b} + 1 - \ln 2\right] &&\\
&= 1 - \ln 2 && \text{10 puntos}
\end{aligned}$$